εξειδικευμένο φροντιστήριο μαθηματικών
ΚΑΡΙΝΙΩΤΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ
Μαθηματικός

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
E: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ –ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2009

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για να είναι η συνάρτηση f σταθερή στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

Πράγματι έχουμε

i)αν $\chi_1 = \chi_2$ τότε $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ που προφανώς ισχύει.

ii)αν $\chi_1 \neq \chi_2$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\chi_1 < \chi_2$. Τότε η f είναι συνεχής στο$[\chi_1, \chi_2] \subset \Delta$ και παραγωγίσιμη στο (χ_1, χ_2).

Άρα από θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\chi_1, \chi_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\chi_2) - f(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1}$ $(*)$. Αφού όμως το ξ είναι εσωτερικό του Δ τότε από υπόθεση $f'(\xi) = 0$. Οπότε η $(*)$ δίνει $f(\chi_2) - f(\chi_1) = 0$ $\Leftrightarrow f(\chi_1) = f(\chi_2)$. Άρα τελικά η f είναι σταθερή στο Δ

Ομοίως αν $\chi_1 > \chi_2$ αποδεικνύεται ότι η είναι σταθερή.

Β. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A_f και $\chi_0 \in A_f$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, αν υπάρχει το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$ και είναι πραγματικός

αριθμός. Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της f στο χ_0 και συμβολίζεται $f'(\chi_0)$.

Δηλαδή $f'(\chi_0) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$

Γ. α) → Σωστό β) → Σωστό γ) → Λάθος δ) → Λάθος ε) → Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α)Αναζητώ τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z=(2λ+1) + $(2\lambda - 1)i$. Έστω Μ(χ, y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

Τότε ισχύει χ=2λ+1 και y=2λ−1. Ο γεωμετρικός τόπος βρίσκεται με απαλοιφή

του λ από τις παραπάνω εξισώσεις. Άρα αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$\chi - y = 2\lambda + 1 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \chi - y = 2 \Leftrightarrow y = \chi - 2$

β)Έστω z_0 ο μιγαδικός με το μικρότερο δυνατό μέτρο. Τότε

$|z_0|_{min} = d(O, (\varepsilon))$ όπου O(0, 0) και ε: y=χ−2⇔ε:$\chi - y - 2 = 0$.

Άρα $|z_0|_{min} = \frac{|0-0-2|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z_0|_{min} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Όμως $z_0 = (2\lambda+1) + (2\lambda - 1)i$, λ∈ ℝ. Αρκεί λοιπόν να βρούμε το λ για το οποίο

$|z_0| = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z_0|^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 + (2\lambda - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 2 \Leftrightarrow 8\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Συνεπώς $z_0 = 1 - i$

Β. Έστω w=κ+λi , κ, λ∈ ℝ. Τότε $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2 + \lambda^2 + \kappa - \lambda i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 + \kappa - \lambda i - 12 - 1 + i = 0 \Leftrightarrow$

$(\kappa^2 + \lambda^2 + \kappa - 13) + (1 - \lambda)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2 + \lambda^2 + \kappa - 13 = 0 \\ 1 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \kappa^2 + \kappa - 12 = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

Λύνω την εξίσωση $\kappa^2 + \kappa - 12 = 0$, Δ=1−4(−12) $= 49 > 0$, άρα

$\kappa_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 = -4 \end{cases}$.Οπότε $\begin{cases} \kappa = 3 \text{ ή } \kappa = -4 \\ \kappa\alpha\iota \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\{\kappa = 3, \lambda = 1\}$ και $\{\kappa = -4, \lambda = 1\}$

Συνεπώς οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι $w_1 = 3 + i$ και $w_2 = -4 + i$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Α. Είναι f(χ)=$\alpha^\chi - \ln(\chi + 1)$, $A_f = (-1, +\infty)$, α> 0, $\alpha \neq 1$

Ισχύει f(χ)≥ 1, για κάθε χ∈(−1, +∞) και f(0)=$\alpha^0 - \ln 1 = 1$

Άρα έχουμε f(χ)≥f(0) , ∀χ∈(−1, +∞), αυτό σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο στη θέση $\chi_0 = 0$

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
Ε: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και αφού το $\chi_0=0$ είναι εσωτερικό του $(-1,+\infty)$ είναι και θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα από θεώρημα Fermat $f'(0)=0$

όπου $f'(\chi)=\alpha^\chi\ln\alpha-\frac{1}{\chi+1}$, έτσι $f'(0)=0\Leftrightarrow\alpha^0\ln\alpha-1=0\Leftrightarrow\ln\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=e$

Β. α) Για α=e είναι $f(\chi)=e^\chi-\ln(\chi+1)$ με $A_f=(-1,+\infty)$ και $f'(\chi)=e^\chi-\frac{1}{\chi+1}$

Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(\chi)=e^\chi-\left(\frac{1}{\chi+1}\right)'=e^\chi+\frac{1}{(\chi+1)^2}>0$ για κάθε $\chi\in(-1,+\infty)$

Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$

β) Έχω $f'(\chi)=e^\chi-\frac{1}{\chi+1}=\frac{e^\chi(\chi+1)-1}{\chi+1}$, $\forall\chi\in(-1,+\infty)$.

ο παρανομαστής $\chi+1>0$, άρα το πρόσημο της f' το καθορίζει ο αριθμητής $e^\chi(\chi+1)-1$. Έτσι λοιπόν θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=e^\chi(\chi+1)-1$ με $\chi\in(-1,+\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $g'(\chi)=e^\chi(\chi+1)+e^\chi>0$, $\forall\chi\in(-1,+\infty)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$

Οπότε έχουμε

Για $\chi>0\Rightarrow g(\chi)>g(0)\Leftrightarrow g(\chi)>0$, άρα $f'(\chi)=\frac{g(\chi)}{\chi+1}>0$, $\forall\chi\in(0,+\infty)$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

για $-1<\chi<0\Rightarrow g(\chi)<g(0)\Leftrightarrow g(\chi)<0$, άρα $f'(\chi)=\frac{g(\chi)}{\chi+1}<0$, $\forall\chi\in(-1,0)$

συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$

γ) Έχουμε $\frac{f(\beta)-1}{\chi-1}+\frac{f(\gamma)-1}{\chi-2}=0\Leftrightarrow(\chi-2)(f(\beta)-1)+(\chi-1)(f(\gamma)-1)=0$

Οπότε θεωρώ τη συνάρτηση

$h(\chi)=(\chi-2)(f(\beta)-1)+(\chi-1)(f(\gamma)-1)$

η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα και στο $[1,2]\subset\mathbb{R}$ με

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
Ε: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

$h(1)=(1-2)\ (f(\beta)-1)=-\ (f(\beta)-1) < 0$

διότι ισχύει $f(\chi)\geq 1 = f(0)$ και αφού η ισότητα ισχύει για χ=0(αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα $(0, +\infty)$ και $(-1, 0)$) και $\beta\neq 0$

τότε $f(\beta)> 1\Leftrightarrow f(\beta)-1 > 0$ και

$h(2)=f(\gamma)-1 > 0$ για τον ίδιο λόγο αφού $\gamma\neq 0$

οπότε $h(1)h(2)< 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ από θεώρημα Bolzano

για την h , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$h(\xi)=0\Leftrightarrow(\xi-2)(f(\beta)-1) + (\xi - 1)(f(\gamma)-1)=0(*)$

όμως $\xi\in (1,2)\Leftrightarrow 1< \xi < 2$ δηλαδή $\xi - 1 \neq 0$ και $\xi-2 \neq 0$

άρα διαιρώντας την προηγούμενη σχέση (*) με $(\xi - 1)\ (\xi-2)$ έχουμε

$\frac{f(\beta)-1}{\xi-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\xi-2} = 0$ με $\xi\in (1,2)$

Συνεπώς η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\chi-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\chi-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2)

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α)Η G είναι συνεχής στο (0, 2] γιατί η $\frac{H(\chi)}{\chi}$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και

αυτό γιατί η $\chi f(\chi)$ είναι συνεχής στο [0, 2] και επίσης

η $\int_0^{\chi} f(t)dt$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και αυτό γιατί η f είναι συνεχής στο [0, 2]

Οπότε ζήτημα συνέχειας για την G τίθεται στη θέση χ=0

Έχουμε $G(0)=6\cdot \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=(\frac{0}{0})=6\cdot \lim\limits_{t\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-t^2})(1+\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=$

$6\cdot \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-(1-t^2)}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=6\cdot \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-1+t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=6\cdot \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=6\cdot \frac{1}{2}=3$

Δηλαδή G(0)=3

Και $\lim\limits_{\chi\to 0} G(\chi)= \lim\limits_{\chi\to 0^+} G(\chi)= \lim\limits_{\chi\to 0^+}(\frac{H(\chi)}{\chi} - \int_0^{\chi} f(t)\,dt + 3\ )$

Όπου

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
Ε: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

$\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{H(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{\int_0^{\chi} tf(t)\,dt}{\chi}=(\frac{0}{0})\ (*)$

Και αφού η $\int_0^{\chi} tf(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη διότι η χf(χ) είναι συνεχής, τότε από

Κανόνα De L΄Hospital το όριο $(*)$ ισούται με $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{(\int_0^{\chi} tf(t)\,dt)'}{(\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{\chi f(\chi)}{1}=$

$\lim\limits_{\chi\to 0^+}$χf(χ) =0f(0)=0

Και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\int_0^{\chi} f(t)\,dt=0$

Οπότε $\lim\limits_{\chi\to 0}$ G(χ)= $\lim\limits_{\chi\to 0^+}$ G(χ)=0−0 + 3 = 3

Συνεπώς $\lim\limits_{\chi\to 0^+}$ G(χ)= G(0)=3 .Άρα η G είναι συνεχής στο χ=0 . Επομένως η

G είναι συνεχής στο [0, 2]

β)Για κάθε χ∈ (0, 2) η συνάρτηση G(χ)= $\frac{H(\chi)}{\chi}-\int_0^{\chi} f(t)\,dt+3$ είναι

παραγωγίσιμη, αφού $H(\chi)$ και $\int_0^{\chi} f(t)\,dt$ παραγωγίσιμες και αυτό συμβαίνει

γιατί οι χf(χ), f(χ) είναι συνεχείς στο[0, 2]

άρα G ΄(χ)=$\left(\frac{H(\chi)}{\chi}\right)'-f(\chi)=\frac{H'(\chi)\cdot\chi-H(\chi)}{\chi^2}-f(\chi)=\frac{\chi^2 f(\chi)-H(\chi)-\chi^2 f(\chi)}{\chi^2}=$

$=-\frac{H(\chi)}{\chi^2}$. Άρα G ΄(χ) $=-\frac{H(\chi)}{\chi^2}$ για κάθε χ∈ (0, 2)

γ)Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2) με

G(0)=3 και G(2)= $\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)\,dt+3=\frac{\int_0^2 tf(t)\,dt}{2}-\int_0^2 f(t)\,dt+3=$

$\frac{\int_0^2 tf(t)\,dt-2\int_0^2 f(t)\,dt}{2}+3=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2(t-2)f(t)\,dt+3=\frac{1}{2}\cdot 0+3=3$(από υπόθεση)

Δηλαδή G(0)= G(2)=3

Τότε από θεώρημα Rolle για την G στο [0, 2] , υπάρχει ένα τουλάχιστον α∈ (0, 2)

Τέτοιο ώστε G΄(α)=0⇔$-\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}$=0⇔ $H(\alpha)=0$

δ)Η G είναι συνεχής στο [0, α], α∈ (0, 2) και παραγωγίσιμη στο (0, α)⊂(0, 2),

τότε από το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού Λογισμού

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
T: 210 4978037 · K: 6937 728625
E: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)\,dt+3-3}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2}=-\frac{\int_0^\alpha f(t)\,dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot H(\xi)=\xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)\,dt \Leftrightarrow \alpha \cdot \int_0^\xi tf(t)\,dt=\xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)\,dt$$