



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

2009

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Η απόδειξη θα γίνει στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

Έστω $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, ($\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$) όπου με $N(A)$, $N(B)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A , B αντίστοιχα. Τότε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda$, αφού τα A , B είναι ασυμβίβαστα ($A \cap B = \emptyset$). Δηλαδή έχουμε

$$N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B) \Leftrightarrow N(A \cup B) = N(A) + N(B) (*)$$

Αν Ω ο δειγματικός χώρος, τότε διαιρώντας την προηγούμενη σχέση (*) με $N(\Omega)$

$$\text{έχουμε } \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Β. Ορίζουμε ως σχετική συχνότητα της τιμής χ_i , $i=1, 2, \dots, \kappa$ ($\kappa \leq \nu$) και

συμβολίζουμε με f_i , το ηλίκο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $i=1, 2, \dots, \kappa$, όπου ν_i η συχνότητα της τιμής χ_i και ν το μέγεθος του δείγματος.

Γ. $\alpha \rightarrow$ Λάθος, $\beta \rightarrow$ Σωστό, $\gamma \rightarrow$ Λάθος, $\delta \rightarrow$ Σωστό, $\epsilon \rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Επειδή έχουμε πίνακα (χ_i, ν_i) , $i=1, 2, 3, 4$ για τη μέση τιμή θα

$$\text{χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο } \bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^4 \nu_i \chi_i}{\nu}.$$

Άρα έχουμε



$$\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4}{v} = 4 \Leftrightarrow \frac{6 \cdot 2 + v_2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = 4 \Leftrightarrow \frac{12 + 3v_2 + 15 + 32}{6 + v_2 + 3 + 4} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{59 + 3v_2}{13 + v_2} = 4 \Leftrightarrow 59 + 3v_2 = 4(13 + v_2) \Leftrightarrow 59 + 3v_2 = 52 + 4v_2 \Leftrightarrow$$

$$59 - 52 = 4v_2 - 3v_2 \Leftrightarrow v_2 = 7$$

β) Αφού $v_2 = 7$, τότε το μέγεθος του δείγματος είναι

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \Leftrightarrow v = 20.$$

Τότε η διακύμανση των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2 \text{ (χρησιμοποιούμε αυτόν τον τύπο γιατί δίνεται πίνακας}$$

(x_i, v_i) , $i=1, 2, 3, 4$.

$$\text{Οπότε } s^2 = \frac{1}{20} \cdot \sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$\frac{1}{20} \cdot [6(2 - 4)^2 + 7(3 - 4)^2 + 3(5 - 4)^2 + 4(8 - 4)^2]$$

$$= \frac{1}{20} \cdot (6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 16) = \frac{1}{20} \cdot (24 + 7 + 3 + 64) = \frac{98}{20} = 4,9$$

$$\gamma) \text{ Έχουμε } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \frac{2,2}{4} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 0,55, \text{ δηλαδή } CV = 0,55 > 0,1. \text{ Άρα το}$$

δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_f = \mathbb{R}$ και

είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$

και $f''(x) = 6x - 12$. Έτσι η δοσμένη σχέση

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 =$$

$$3x^2 \Leftrightarrow 12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow -24 + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9$$

β) Για $\alpha = 9$ από το ερώτημα (α) έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Τότε για $x \neq \pm 1$

παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$ απροσδιοριστία). Αρχικά βρίσκουμε



τις ρίζες της $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$, η $x^2 - 4x + 3$ έχει

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 4 > 0 \text{ άρα έχει δύο ρίζες } x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Οπότε $x^2 - 4x + 3 = (x-1) \cdot (x-3)$. Έτσι $f'(x) = 3(x-1) \cdot (x-3)$.

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1) \cdot (x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{x+1} = \frac{3(1-3)}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη γραφική παράσταση της f . Τότε αφού η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = -3x$, έχουμε λ (εφαπτομένης) $= \lambda = -3$, όμως $\lambda = f'(x_0)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης, άρα $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow$

$$3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ και } f(x_0) = f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 9 \cdot 2 - 7 = -5.$$

Έτσι το σημείο επαφής είναι το $M(2, -5)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = f'(2)x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = -3x + \kappa$. Όμως το $M(2, -5)$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα οι συντεταγμένες του M ικανοποιούν την εξίσωσή της, οπότε $-5 = (-3) \cdot 2 + \kappa \Leftrightarrow -5 = -6 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$. Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -3x + 1$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α) Η $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$A_f = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γραμμικός

συνδυασμός παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$. Έχουμε λοιπόν

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > (\text{αφού } x > 0) \Leftrightarrow 2 > x$$

, δηλαδή $f'(x) > 0$ αν $0 < x < 2$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$ και

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} < 0 \Leftrightarrow 2-x < (\text{αφού } x > 0) \Leftrightarrow 2 < x$$



δηλαδή $f'(x) < 0$ αν $x > 2$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

β) Τα πιθανά ακρότατα της f δίνονται από τη λύση της εξίσωσης

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} = 0 \Leftrightarrow x=2$$

και αφού η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2 (ερώτημα α), τότε το 2 είναι θέση ακροτάτου. Το είδος του ακροτάτου φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$		\nearrow	\searrow

max

Συνεπώς η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση 2,

$$\text{το } f(2) = f_{\max} = \ln 2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

Β. α) Αφού $2 < 3 < 4 < 5 < 8$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ τότε εξ ορισμού $f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$ και τοποθετώντας τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά έχουμε

$$f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2).$$

Οπότε το εύρος είναι $R = f(2) - f(8) =$

$$\ln 2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 - (\ln 8 - \frac{8}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2)$$

$$= \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 - \ln 8 + 4 - \lambda^2 + 6\lambda - 2 = \ln 2 - \ln 8 + 3 =$$

$$\ln \frac{2}{8} + 3 = \ln \frac{1}{4} + 3$$

Και η διάμεσος (αφού οι παρατηρήσεις είναι πέντε το πλήθος) είναι η μεσαία

$$\text{παρατήρηση, δηλαδή } \delta = f(4) = \ln 4 - \frac{4}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

$$\beta) \text{ Έχουμε } A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\} = \{\lambda \in \Omega \mid 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2\}$$

$$= \{\lambda \in \Omega \mid 3 + \ln 1 - \ln 4 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0\}$$



$=\{\lambda \in \Omega \mid \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0\}$ Έχουμε $\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$ με $\Delta = 36 - 4 \cdot 5 = 16 > 0$,

οπότε $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$, άρα

λ		1	5	$+\infty$
$\lambda^2 - 6\lambda + 5$		+	-	+

Οπότε $\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 5)$. Συνεπώς $A = \{\lambda \in \Omega \mid 1 < \lambda < 5\} = \{2, 3, 4\}$ και

αφού $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ τότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0,03$