εξειδικευμένο φροντιστήριο μαθηματικών
ΚΑΡΙΝΙΩΤΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ
Μαθηματικός

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
Ε: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

Ιδιότητες πραγματικών

Πρόσθεση

- Αντιμεταθετική $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- Προσεταιριστική $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
- Ουδέτερο στοιχείο $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
- Αντίθετο στοιχείο $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$

Πολλαπλασιασμός

- Αντιμεταθετική $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
- Προσεταιριστική $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
- Ουδέτερο στοιχείο $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$
- Αντίστροφο στοιχείο $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1 (\alpha\neq 0)$

- $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$
- $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\ (\beta\neq 0)$
- Αν $\begin{cases}\alpha=\beta\\ \quad\kappa\alpha\iota\\ \gamma=\delta\end{cases}$ τότε $\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\delta\\ \quad\kappa\alpha\iota\\ \alpha\gamma=\beta\delta\end{cases}$
- Αν $\alpha=\beta$ τότε $\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\gamma\\ \quad\kappa\alpha\iota\\ \alpha\gamma=\beta\gamma\end{cases}$
- Αν $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ τότε $\alpha=\beta$
- Αν $\alpha\gamma=\beta\gamma$ και $\gamma\neq 0$ τότε $\alpha=\beta$
- $\alpha\cdot 0=0$
- $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$
- $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0\ \kappa\alpha\iota\ \beta\neq 0$
- $(-1)\cdot\alpha=-\alpha$
- $(-\alpha)\cdot\beta=-\alpha\beta$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\beta$
- $-(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta$
- $\frac{1}{\alpha\cdot\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$
- $\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}$
- $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta\pm\beta\gamma}{\beta\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$

Δυνάμεις

- Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ και $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Τότε $\alpha^n=\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha(n\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma)$. Για $n=1 \Longrightarrow \alpha^1=\alpha$ και για $n=0 \Longrightarrow \alpha^0=1$
  - $\alpha^n\alpha^m=\alpha^{n+m}$
  - $\frac{\alpha^n}{\alpha^m}=\alpha^{n-m} (\alpha\neq 0)$
- $(\alpha^n)^m=\alpha^{nm}$
- $(\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=\frac{\alpha^n}{\beta^n}\ (\beta\neq 0)$
- $\alpha^{-n}=\frac{1}{\alpha^n}\ (\alpha\neq 0)$
- $(\frac{\alpha}{\beta})^{-n}=(\frac{\beta}{\alpha})^n\ (\alpha,\beta\neq 0)$
- $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^n=\beta^n$ (το αντίστροφο δεν ισχύει)

Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+b^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-b^3$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
- $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$
- $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$

Παραγοντοποίηση

- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- $\alpha^2\pm 2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha\chi+\beta=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\alpha\chi+\beta=0$ (1), $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1. Αν $\alpha\neq 0$, τότε η (1) έχει μοναδική λύση την $\chi=\frac{-\beta}{\alpha}$
2. Αν $\alpha=0$, τότε η (1) γίνεται $0\chi=-\beta$ (2)
   - Αν $\beta=0$, τότε η (2) γίνεται $0\chi=0$ η οποία είναι αόριστη, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις, άρα και η ισοδύναμή της (1).
   - Αν $\beta\neq 0$, τότε η (2) γίνεται $0\chi=-\beta (\beta\neq 0)$ η οποία είναι αδύνατη, άρα και η ισοδύναμή της (1).

Διάταξη

- $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$
- $\alpha>\beta$ ή $\alpha=\beta$, τότε $\alpha\geq\beta$
- αν $\begin{cases}\alpha>0\\ \kappa\alpha\iota\\ \beta>0\end{cases}$ τότε $\alpha+\beta>0$

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
Ε: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

- αν $\begin{cases}\alpha<0\\ \kappa\alpha\iota\\ \beta<0\end{cases}$ τότε $\alpha+\beta<0$
- αν α, β ομόσημοι τότε $\begin{cases}\alpha\beta>0\\ \kappa\alpha\iota\\ \frac{\alpha}{\beta}>0\end{cases}$
- αν α, β ετερόσημοι τότε $\begin{cases}\alpha\beta<0\\ \kappa\alpha\iota\\ \frac{\alpha}{\beta}<0\end{cases}$
- για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2\geq 0$
- αν $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \kappa\alpha\iota\\ \beta>\gamma\end{cases}$ τότε $\alpha>\gamma$
- $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$
- αν $\gamma>0$ τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$
- αν $\gamma<0$ τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$
- αν $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \kappa\alpha\iota\\ \gamma>\delta\end{cases}$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$
- αν α, β, γ, δ> 0 και $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \kappa\alpha\iota\\ \gamma>\delta\end{cases}$ τότε $\alpha\gamma>\beta\delta$
- αν α, β> 0 και $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\neq 0$ τότε
  $\begin{cases}\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu=\beta^\nu\\ \alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu>\beta^\nu\end{cases}$

Απόλυτη τιμή

- Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ τότε
  $|\alpha|=\begin{cases}\alpha\ ,\alpha\nu\ \alpha\geq 0\\ -\alpha\ ,\alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}$
- $|\alpha|\geq 0\ ,\forall\alpha\in\mathbb{R}$
- $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}: |\alpha|+|\beta|=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$
- $|\alpha|\geq\alpha$ και $|\alpha|\geq-\alpha\ ,\forall\alpha\in\mathbb{R}$
- $|\alpha|^2=\alpha^2\ ,\forall\alpha\in\mathbb{R}$
- $|\alpha|=|\beta|\Leftrightarrow\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$
- $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|\ ,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\ ,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta\neq 0$
- $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|\ ,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha+\beta|\ ,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- $|\chi|<\alpha\Leftrightarrow-\alpha<\chi<\alpha$,για $\alpha>0$
- $|\chi|\leq\alpha\Leftrightarrow-\alpha\leq\chi\leq\alpha$,για $\alpha>0$
- $|\chi|>\alpha\Leftrightarrow\chi>\alpha$ ή $\chi<-\alpha$,για $\alpha>0$
- $|\chi|\geq\alpha\Leftrightarrow\chi\geq\alpha$ ή $\chi\leq-\alpha$,για $\alpha>0$

Ρίζες

Τετραγωνικές ρίζες

- Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$,$\alpha\geq 0$.Καλούμε τετραγωνική ρίζα του α και συμβολίζουμε $\sqrt{\alpha}$ την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^2=\alpha$,δηλ.$\chi=\sqrt{\alpha}$.
- $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$,$(\alpha,\beta\geq 0)$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ (\alpha\geq 0,\beta>0)$
- $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|,\alpha\in\mathbb{R}$
- $\sqrt{\alpha^2}=(\sqrt{\alpha})^2=\alpha\ ,(\alpha\geq 0)$
- $\sqrt{\alpha}=\sqrt{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta,(\alpha,\beta\geq 0)$
- $\sqrt{\alpha}>\sqrt{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta\ ,(\alpha,\beta\geq 0)$
- $\alpha\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha^2\beta}$,$\alpha,\beta\geq 0$

Προσοχή:$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$ και $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha-\beta}$

Νιοστές ρίζες πραγματικών αριθμών

- Έστω $\alpha\geq 0$ και $\nu\in\mathbb{N}$.Καλούμε ν-οστή ρίζα του α και συμβολίζουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}$,την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^\nu=\alpha$ δηλαδη $\chi=\sqrt[\nu]{\alpha}$.
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha$,για $\alpha\geq 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$,$(\alpha,\beta\geq 0)$
- $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$,$(\alpha\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \beta>0)$
- $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$,$(\alpha\geq 0)$
- $\sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$,$(\alpha\geq 0)$
- $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$,$(\alpha,\beta\geq 0)$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}(\alpha\geq 0)$
- $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{1/\nu}(\alpha\geq 0)$