απόδειξις φροντιστήριο μαθηματικών

εξειδικευμένο φροντιστήριο μαθηματικών
ΚΑΡΙΝΙΩΤΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ
Μαθηματικός

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
Τ: 210 4978037 · Κ: 6937 728625
Ε: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- ημ(2κπ+χ) = $\eta\mu\chi$
- συν(2κπ+χ) = $\sigma\upsilon\nu\chi$ (κ∈ ℤ)
- εφ(2κπ+χ) = $\varepsilon\varphi\chi$
- σφ(2κπ+χ) = $\sigma\varphi\chi$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$
- εφχ=$\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$
- σφχ=$\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$
- $\eta\mu^2\chi = \frac{\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$

Ιδιότητες

- |ημχ|≤ 1 ($-1 \le \eta\mu\chi \le 1$)
- |συνχ|≤ 1 ($-1 \le \sigma\upsilon\nu\chi \le 1$)
- |ημχ|≤ $|\chi|$

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

1ο τεταρτημόριο χ∈ $(0,\frac{\pi}{2})$

- ημχ> 0
- συνχ> 0
- εφχ> 0
- σφχ> 0

2ο τεταρτημόριο χ∈ $(\frac{\pi}{2},\pi)$

- ημχ> 0
- συνχ< 0
- εφχ< 0
- σφχ< 0

3ο τεταρτημόριο χ∈ $(\pi,\frac{3\pi}{2})$

- ημχ< 0
- συνχ< 0
- εφχ> 0
- σφχ> 0

4ο τεταρτημόριο χ∈ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

- ημχ< 0
- συνχ> 0
- εφχ< 0
- σφχ< 0

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

χ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ημχ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνχ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφχ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
σφχ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνχ	1	0	−1	0	1
ημχ	0	1	0	−1	0
εφχ	0	−	0	−	0
σφχ	−	0	−	0	−

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Αντίθετες γωνίες

- ημ($-\chi$) = $-\eta\mu\chi$
- συν($-\chi$) = $\sigma\upsilon\nu\chi$
- εφ($-\chi$) = $-\varepsilon\varphi\chi$
- σφ($-\chi$) = $-\sigma\varphi\chi$

Παραπληρωματικές γωνίες

- ημ(π$-\chi$) = $\eta\mu\chi$
- συν(π$-\chi$) = $-\sigma\upsilon\nu\chi$
- εφ(π$-\chi$) = $-\varepsilon\varphi\chi$
- σφ(π$-\chi$) = $-\sigma\varphi\chi$

Γωνίες που διαφέρουν κατά π

- ημ(π+χ) = $-\eta\mu\chi$
- συν(π+χ) = $-\sigma\upsilon\nu\chi$
- εφ(π+χ) = $\varepsilon\varphi\chi$
- σφ(π+χ) = $\sigma\varphi\chi$

ΕΚΤΩΡΟΣ 30 · ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ
T: 210 4978037 · K: 6937 728625
E: info@apodeixis.gr
www.apodeixis.gr

Συμπληρωματικές γωνίες

- ημ$(\frac{\pi}{2}-\chi)$=συνχ
- συν$(\frac{\pi}{2}-\chi)$=ημχ
- εφ$(\frac{\pi}{2}-\chi)$=σφχ
- σφ$(\frac{\pi}{2}-\chi)$=εφχ

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

- ημχ=ημθ⇔$\begin{cases} \chi=2\kappa\pi+\theta \text{ ή} \\ \chi=2\kappa\pi+(\pi-\theta) \end{cases}$
- συνχ=συνθ⇔$\begin{cases} \chi=2\kappa\pi+\theta \\ \chi=2\kappa\pi-\theta \end{cases}$ ή
- εφχ=εφθ⇔χ=κπ+θ
- σφχ=σφθ⇔χ=κπ+θ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος-διαφοράς γωνιών

- συν(α+β)=συνασυνβ−ημαημβ
- συν(α−β)=συνασυνβ+ημαημβ
- ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα
- ημ(α−β)=ημασυνβ−ημβσυνα
- εφ(α+β)=$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
- εφ(α−β)=$\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
- σφ(α+β)=$\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$
- σφ(α−β)=$\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2 α

- ημ2α=2ημασυνα
- συν2α=$\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$=$2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$=1−$2\eta\mu^2\alpha$
- εφ2α=$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$,σφ2α=$\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}$

Ειδικοί τύποι

- ημα=2ημ$\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$
- συνα=$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$
- εφα=$\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$
- σφα=$\frac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}}$
- $\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- $\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Νόμος ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$,όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου .

Νόμος των συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

- $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$
- $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$
- $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu A$

(κ∈ $\mathbb{Z}$)